ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ VĂN KIÊN

SỐ PHỨC VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ VĂN KIÊN

SỐ PHỨC VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG LIÊN QUAN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của TS. Ngô Văn Định. Qua đây em xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy giáo, người hướng dẫn khoa học của mình, TS. Ngô Văn Định, người đã đưa ra đề tài và dành nhiều thời gian tận tình hướng dẫn, giải đáp những thắc mắc của em trong suốt quá trình nghiên cứu. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy.

Em xin trân trọng cảm ơn các Thầy Cô đã tham gia giảng dạy và Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để em học tập và nghiên cứu. Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp cao học K7B đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp Trường THPT Hùng Thắng - Huyện Tiên Lãng - Thành phố Hải Phòng đã tạo điều kiện cho tôi học tập và hoàn thành kế hoạch học tập.

Tôi cảm ơn đại gia đình, bạn bè và các đồng nghiệp đã động viên giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Danh sách kí hiệu

$\mathbb{R}$	tập hợp số thực
$\mathbb{C}$	tập hợp số phức
$\operatorname{Im} z$	phần ảo của số phức z
$\operatorname{Re} z$	phần thực của số phức z
$\arg z$	argument của số phức z
$\lvert z\rvert$	môđun của số phức z
$\overline{z}$	số phức liên hợp của số phức z
$A(a)$	điểm A biểu diễn cho số phức a
$z \cdot w$	tích thực của hai số phức z và w
$z \times w$	tích phức của hai số phức z và w

Mở đầu

Số phức là một tập hợp số quan trọng trong toán học. Trong chương trình toán học ở trường phổ thông trung học hiện nay, số phức mới chỉ được giới thiệu về định nghĩa, các phép toán, dạng đại số, dạng lượng giác và một số tính chất cơ bản. Tuy nhiên, số phức có rất nhiều ứng dụng trong giải toán. Đặc biệt, trong giải toán sơ cấp, số phức có thể được sử dụng để giải các bài toán thuộc các chuyên đề khác nhau như: hình học, đại số tổ hợp, tích phân, lượng giác, ...

Mục đích của luận văn là trình bày ứng dụng của số phức vào giải một số dạng toán hình học phẳng, đặc biệt là các dạng toán giải tam giác (tức là các bài toán liên quan đến các vấn đề trong tam giác). Mỗi số phức được biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng 2 chiều và ngược lại, mỗi điểm trong mặt phẳng hai chiều biểu diễn một số phức. Với tương ứng $1-1$ này, ta có thể chuyển đổi các tính chất hình học trên mặt phẳng về các phép toán đối với các số phức. Từ đó, ta chuyển được các bài toán hình học phẳng thành các bài toán đại số trên tập hợp số phức.

Các bài toán giải tam giác thường được quan tâm rất nhiều trong chương trình hình học phẳng ở trường phổ thông. Ngay từ khi học sinh được làm quen với hình học phẳng thì tam giác là hình đa giác được giới thiệu rất kĩ lưỡng với nhiều yếu tố. Các bài toán về tam giác vô cùng phong phú. Luận văn trình bày ứng dụng của số phức vào giải một số bài toán về tam giác đồng dạng, tam giác đều, diện tích tam giác, các điểm đặc biệt và các khoảng cách đặc biệt trong tam giác. Ngoài ra, luận văn còn trình bày một số bài toán về đa giác nội, ngoại tiếp đường tròn và một số bài toán quỹ tích và dựng hình.

Cấu trúc luận văn

Nội dung chính của luận văn được trình bày thành 4 chương:

• Chương 1: Số phức và hình học trên mặt phẳng phức. Trong chương này, chúng tôi trình bày một cách sơ lược về số phức và một số phép toán số phức liên quan đến giải tích trên mặt phẳng mà sẽ được sử dụng trong các chương tiếp theo.

• Chương 2: Áp dụng số phức vào giải một số bài toán tam giác. Chương này trình bày về ứng dụng của số phức vào giải một số bài toán về tam giác. Đầu chương chúng tôi trình bày về điều kiện cần và đủ của hai tam giác đồng dạng và tam giác đều. Đồng thời, chúng tôi trình bày thêm một số bài tập áp dụng các tính chất này. Trong mục 2.2 chúng tôi trình bày công thức tổng quát xác định tọa độ của các điểm đặc biệt trong tam giác, như: trọng tâm, trực tâm, điểm Gergonne, điểm Nagel, ... Trong các mục tiếp theo, chúng tôi trình bày về áp dụng số phức trong tính toán khoảng cách và diện tích trong tam giác.

• Chương 3: Áp dụng số phức vào giải một số bài toán về đa giác nội tiếp, ngoại tiếp đường tròn. Trong chương này, chúng tôi trình bày về một số tính chất của đường tròn ngoại tiếp tam giác như: tam giác pedal, đường Simson-Wallance, tính trực giao cực của hai tam giác cùng nội tiếp một đường tròn. Cuối chương, chúng tôi trình bày áp dụng của số phức vào một số bài toán về đa giác đều.

• Chương 4: Áp dụng số phức vào giải một số bài toán dựng hình và một số bài toán quỹ tích.

Do khối lượng kiến thức lớn và thời gian nghiên cứu chưa đủ dài, chắc chắn luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong muốn nhận được sự góp ý của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 4 năm 2015

Vũ Văn Kiên

Email: `kien78thptht@gmail.com`

Chương 1

Số phức và hình học trên mặt phẳng phức

Trong chương đầu tiên này, chúng tôi trình bày sơ lược về số phức và một số phép toán của số phức liên quan đến hình học phẳng sẽ được sử dụng cho các chương tiếp theo. Ở đây, chúng tôi không trình bày lại định nghĩa về số phức và các phép toán cộng, trừ, nhân và chia số phức thông thường. Chúng tôi chủ yếu trình bày trong chương này khái niệm về tích thực và tích phức của hai số phức, Ngoài ra, chúng tôi có trình bày thêm mối liên hệ giữa phép nhân số phức với một số phức có môđun bằng 1 và phép quay trên mặt phẳng. Phần cuối chương, chúng tôi trình bày một số công thức tính diện tích tam giác dựa vào các tọa độ phức của các đỉnh.

1.1 Mặt phẳng phức

Ta biết rằng mỗi số phức được biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng 2 chiều Oxy và mỗi điểm trên mặt phẳng Oxy là biểu diễn hình học của một số phức duy nhất. Nếu M là điểm trên mặt phẳng biểu diễn số phức m thì ta nói số phức m là tọa vị của điểm M và viết $M(m)$. Trong suốt luận văn này, trừ những chỗ ghi cụ thể, chúng tôi quy ước sử dụng kí hiệu chữ cái in hoa cho điểm nằm trên mặt phẳng và chữ cái thường tương ứng là tọa vị phức của điểm đó.

1.2 Tích thực của hai số phức

Định nghĩa 1.1. Cho a và b là hai số phức. *Tích thực* của hai số phức a và b là số, kí hiệu $a \cdot b$, được xác định bởi công thức sau

$$a \cdot b = \frac{1}{2}\left(\overline{a}b + a\overline{b}\right).$$

Theo định nghĩa, ta có

$$\overline{a \cdot b} = \frac{1}{2}\left(a\overline{b} + \overline{a}b\right) = a \cdot b.$$

Do đó $a \cdot b$ là một số thực, điều đó giải thích cho tên gọi của phép toán này.

Giả sử a và b lần lượt có dạng đại số là:

$$a = x_1 + y_1 i, b = x_2 + y_2 i,$$

với $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Khi đó, ta có $a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2$. Gọi A và B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng biểu diễn các số phức a và b. Xét mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy ta dễ thấy rằng tích thực $a \cdot b$ chính là tích vô hướng của hai véc tơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Với nhận xét này, chúng ta dễ dàng có được các tính chất dưới đây của tích thực.

Định lí 1.1. *Cho các số phức a, b, c, z ta có các mối quan hệ sau*

(1) $a \cdot a = |a|^2$.

(2) $a \cdot b = b \cdot a$.

(3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

(4) $(\alpha a) \cdot b = \alpha (a \cdot b) = a \cdot (\alpha b)$ *với mọi* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(5) $a \cdot b = 0$ *khi và chỉ khi* $OA \perp OB$.

(6) $(az) \cdot (bz) = |z|^2 (a \cdot b)$.

Chứng minh. Các tính chất (1), (2), (3), (4), (5) được suy ra trực tiếp từ tính chất của tích vô hướng. Tính chất (6) dễ dàng có được từ định nghĩa của tích thực. □